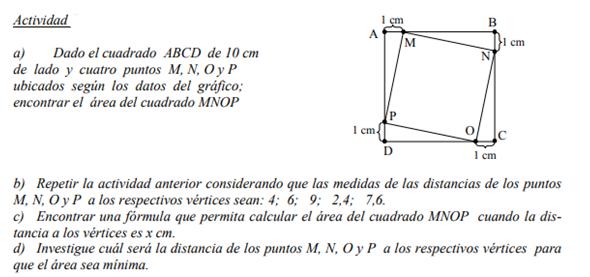
Relaciones Funcionales



Queda a cargo del lector realizar los ítems a y b.

En cuanto al ítem c, llamando x = distancia entre los puntos fijos A, B, C y D y los puntos móviles M, N, O y P, respectivamente.

El área del cuadrado ABCD = 100, si se le resta el área de los cuatro cuadrados queda:

Área(x) = =

O bien, usando el Teorema de Pitágoras: la longitud de MN = , como MNOP es un cuadrado (¿cómo se justifica esto?) su área es:

Área(x) =

La relación así formulada entre distancia entre los puntos fijos A, B, C y D, vértices de un cuadrado, y los puntos móviles M, N, O y P, y el área del cuadrilátero MNOP, es una relación funcional.

Sean A y B dos conjuntos no vacíos, que llamaremos dominio y codominio respectivamente. Entenderemos por función de A en B toda regla que hace corresponder a cada elemento del dominio un único elemento del codominio. Más precisamente, una función es un conjunto de pares ordenados tales que la primera componente pertenece a A y la segunda a B, es decir, un subconjunto de A x B, de modo que todo elemento de A sea primera componente de un par y sólo uno. Esto nos dice que toda función de A en B es una relación especial entre A y B.

Las funciones suelen denotarse con f, g, h, etc. Así, para denotar que f es una función de A en B, se escribe: f: A → B se lee “f es una función o aplicación de A en B

x → y = f(x) que a cada elemento x de A le hace corresponder como imagen y de B”

Ejemplo 1:

Sean A = { -1 , 0 , 1 , 2} , B = { 0 , 1 , 2 , 3 , 4} y f es una relación definida por (x , y ) ∈ f ⇔ y =

Lo que también puede expresarse:

f: A → B

x → y = f(x) =

f = { (-1 , 1) . (0 , 0) , (1 , 1) , (2 , 4) }

El diagrama de Venn correspondiente es:



***Definición****: Sean A y B dos conjuntos no vacíos, la relación f de A en B es una función o aplicación de A en B si y sólo si todo elemento de A tiene un único correspondiente en B.*

***Definición****: Sean A y B dos conjuntos no vacíos, la relación f de A en B es una función o aplicación de A en B si y sólo si es un subconjunto de A x B que satisface las siguientes condiciones de existencia y unicidad:*

*Existencia:*

*Unicidad: ∧ → y = z*

*Si se dice que y es el correspondiente o imagen de x, por f, y = f(x)*

Una función queda especificada si se dan el dominio A, el codominio B y la relación f ⊆ A x B, que satisface los postulados o condiciones de existencia y unicidad.

**Conjunto Dominio**: Sea f una función definida de A en B. Se llama dominio de la función f, Dom f, al conjunto formado por todos los elementos de A que se relacionan a través de f con los elementos de B.

Dom f = { x ∈ A / (x , y ) ∈ f} = A

**Conjunto Imagen**: Sea f una función definida de A en B. Se llama imagen de la función f, Im f, al conjunto formado por todos los elementos de B que se relacionan a través de f con los elementos de A.

Im f = { y ∈ B / (x , y ) ∈ f} ⊆ B

**Conjunto Codominio**: Sea f una función definida de A en B. Se llama codominio de la función f, Codom f, al conjunto formado por todos los elementos B.

Codom f = { y ∈ B } = B

Ejemplo 2: Sean A = {a , b , c , d } , B = {1 , 2 , 3} y la relación f = {(a , 1) , (b , 2) , (c , 2) , (d , 1)}

Esta relación verifica las condiciones de existencia y de unicidad, por lo tanto f es una función .

f(a) = 1 f(b) = 2 f(c) = 2 f(d) = 1



Dom f = {a , b , c , d} = A Codom f = { 1 , 2 , 3} Im f = { 1 , 2 }

Ejemplo 3: Sean A = {-2 , -1 , 0 , 1 . 2 } , B = N y la relación f: A → N / y = f(x) = | x | + 1

f = {(-2 , 3) , (-1 , 2) , (0 , 1) , (1 , 2) , (2 , 3)}

cada elemento (x , y) ∈ f es un punto del plano de coordenadas x e y. La representación cartesiana es[[1]](#footnote-1):

|  |  |
| --- | --- |
|  | Dom f = A  Codom f =N  Im f = { 1 , 2 , 3} |

Ejemplo 4: Sean A = R , B = R y la relación f: R → R / y = f(x) = | x | + 1

La correspondiente representación cartesiana es:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Dom f = R  Codom f =R  Im f = [1 , ∝[ ⊆ R |

Si retomamos la actividad inicial y quisiéramos averiguar, por ejemplo, cuál será la distancia de los puntos M, N, O y P a los respectivos vértices del cuadrado ABCD para que el área sea mínima, considerando que la relación hallada es una función cuadrática:

Área(x) =

|  |  |
| --- | --- |
|  | Vértice: V(5 , 50)  Ordenada al origen: (0 , 100)  Dominio en el contexto: Dom A = [0 , 10]  Imagen: Im A = [50 , 100]  Área mínima = 50 cuando x = 5 |

***Clasificación de funciones***

Clasificación según relación entre elementos:

Sea una función f : A → B. Esta función puede ser inyectiva, sobreyectiva o (incluyente) biyectiva.

Si ocurre que elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas en el conjunto imagen, entonces la función se llama función inyectiva, biunívoca o uno a uno.

Si todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio, la función se llama sobreyectiva.

Cuando se presentan ambas situaciones simultáneamente, la función se llama biyectiva o correspondencia biunívoca.

***Función Inyectiva***

***Definición****: Sea f una función de A en B,*

*f es inyectiva ⇔*

Equivalentemente, mediante la implicación contrarrecíproca, se puede decir:

*f es inyectiva ⇔*

***Función Sobreyectiva***

***Definición****: Sea f una función de A en B,*

*f es sobreyectiva ⇔*

Equivalentemente, se puede decir:

*f es sobreyectiva ⇔*

***Función Biyectiva***

***Definición****: Sea f una función de A en B,*

*f es biyectiva ⇔*

O bien:

*f es biyectiva ⇔ f es inyectiva y sobreyectiva.*

Así, la función cuadrática de la actividad inicial es una función no inyectiva, si se considera que el codominio es el conjunto de los números reales, es no sobreyectiva, por lo tanto, es no biyectiva.

Si analizamos las funciones de los ejemplos dados (1, 2, 3 y 4) ninguna es inyectiva, ni sobreyectiva, ni biyectiva, bajo las condiciones dadas.

Aunque siempre es posible realizar restricciones convenientes para trabajar con funciones que si lo sean, así, por ejemplo, si consideramos la función del ejemplo 4, y en lugar de considerar Dom f = R , restringimos el dominio a los , Dom f = , y Codom f = Im f = [1 , ∝[ ⊆ R, la nueva función así definida, es una función biyectiva.

1. [↑](#footnote-ref-1)